Kolokwium - Funkcje Analityczne

15.12.2022

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

1. (10 p.) Znajdź rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{z-1}{(z+2)(z+3)}$ w szereg Laurenta na obszarach:
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \colon 2 < |z| < 3\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 3\}$.

Rozwiązanie:
Rozłóżmy funkcję f na ułamki proste:

$$f(z) = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3}.$$

Mnożąc obustronnnie przez $(z+2)(z+3)$ oraz porównując współczynniki otrzymujemy, że $A = -3$ oraz $B = 4$.
Na pierścieniu $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon 2 < |z| < 3\}$ mamy $\frac{2}{|z|} < 1$ Oraz $\frac{|z|}{3} < 1$, zatem

$$\frac{-3}{z+2} = \frac{-3}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} = \frac{-3}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)\cdot(-2)^{k-1}}{z^k}, \tag{1}$$

$$\frac{4}{z+3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+z/3} = \frac{4}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(-3)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(-3)^{k+1}} z^k.$$

Zatem na pierścieniu A_1 mamy

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \begin{cases} \frac{4}{(-3)^{k+1}}, & k \geqslant 0, \\ (-3)\cdot(-2)^{k-1}, & k < 0. \end{cases}$$

Na zbiorze $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 3\}$ mamy $\frac{2}{|z|} < 1$ oraz $\frac{3}{|z|} < 1$, zatem rozwinięcie funkcji $\frac{-3}{z+2}$ otrzymaliśmy w (1). Rozwinięcie funkcji $\frac{4}{z+3}$ otrzymujemy następująco:

$$\frac{4}{z+3} = \frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1+3/z} = \frac{4}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-3)^{k-1}}{z^k}.$$

Zatem na A_2 mamy

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\cdot(-3)^{k-1} - 3\cdot(-2)^{k-1}\right) z^{-k}.$$

2. (10 p.) Znajdź punkty osobliwe i określ ich rodzaj dla funkcji

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2(z+3)} \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Czy f jest osobliwa w nieskończoności?

Rozwiązanie:

Funckja f jest holomorficzna na obszarze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 2, -3\}$. W punkcie $z_0 = 2$ mamy

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-2)^2},$$

gdzie $g(z) = \frac{z^2}{z+3} \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ jest holomorficzna na pewnym otoczeniu z_0 oraz $g(2) \neq 0$. Zatem f ma biegun podwójny w $z_0 = 2$.

Dla $z_0 = -3$, mamy

$$f(z) = \frac{h(z)}{z+3},$$

gdzie $h(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2} \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ jest holomorficzna na pewnym otoczeniu $z_0 = -3$ oraz $h(-3) \neq 0$. Zatem h ma pojedyńczy biegun w punkcie $z_0 = -3$.

Dla $z_0 = 1$ mamy

$$f(z) = \exp\left(\frac{2}{z-1}\right) k(z),$$

gdzie $k(z) = \frac{e \cdot z^2}{(z-2)^2(z+3)}$ jest holomorficzna w otoczeniu $z_0 = 1$ oraz $k(1) \neq 0$. Zauważmy, że mamy

$$\exp\left(\frac{2}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k! \cdot (z-1)^k},$$

Zatem funkcja $\exp\left(\frac{2}{z-1}\right)$ ma istotną osobliwość w punkcie $z_0 = 1$. W konsekwencji funkcja $f(z)$ ma istotną osobliwość w $z_0 = 1$.

Aby zbadać zachowanie funkcji f w nieskończoności, zauważmy, że

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0,$$

zatem f ma punkt regularny w nieskończoności.

3. (10 p.) Znajdź część rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_{\partial D} \frac{\mathrm{Log}(z+\sqrt{3})}{z(z-i)^2} dz,$$

gdzie:

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$,

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Uwaga: W powyższej całce Log oznacza *logarytm główny*, czyli funkcję holomorficzną

$$\mathrm{Log} \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to \mathbb{C},$$

która jest gałęzią logarytmu zespolonego taką, że $\mathrm{Log}(1) = 0$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że funkcja $\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})$ jest holomorficzna na zbiorze $\Omega = \mathbb{C} \setminus L$, gdzie $L = (-\infty, -\sqrt{3}]$.

(a) Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Zauważmy, że funkcja $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{(z-i)^2}$ jest holomorficzna na wnętrzu D i ciągła na D. Dodatkowo, $\operatorname{Ind}_{\partial D}(0) = 1$. Zatem, z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy,

$$I = \int_{\partial D} \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z(z-i)^2} dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) = 2\pi i \frac{\operatorname{Log}(\sqrt{3})}{(-i)^2} = -2\pi i \operatorname{Log}(\sqrt{3}).$$

Zatem $\operatorname{Re}(I) = 0$ oraz $\operatorname{Im}(I) = -2\pi \operatorname{Log}(\sqrt{3})$.

(b) Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-i| \leqslant 1/2\}$. Wówczas funkcja $g(z) = \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z}$ jest holomorficzna na wnętrzu D, ciągła na D oraz $\operatorname{Ind}_{\partial D}(i) = 1$. Zatem, na mocy twierdzenia Cauchy'ego, otrzymujemy:

$$I = \int_{\partial D} \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z(z-i)^2} dz = \int \frac{g(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i g'(i).$$

Mamy

$$g'(z) = \frac{1}{z(z+\sqrt{3})} - \frac{\operatorname{Log}(z+\sqrt{3})}{z^2},$$

zatem

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{i(i+\sqrt{3})} + \operatorname{Log}(i+\sqrt{3}) \right) = \frac{2\pi}{i+\sqrt{3}} 2\pi i \operatorname{Log}(i+\sqrt{3}).$$

Mamy

$$\frac{2\pi}{i+\sqrt{3}} = 2\pi \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \pi \frac{(\sqrt{3}-i)}{2}.$$

Dodatkowo,

$$\operatorname{Log}(i+\sqrt{3}) = \ln(|i+\sqrt{3}|) + i \operatorname{Arg}(i+\sqrt{3}) = \ln(2) + \frac{\pi i}{6},$$

gdzie Arg jest argumentem głównym. Zatem

$$\operatorname{Re}(I) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{3}, \quad \operatorname{Im}(I) = 2\pi \ln(2) - \frac{\pi}{2}.$$

4. (10 p.) Rozważmy obszar

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 1/2\}.$$

Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$ oraz dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$f\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{k^3}{(k-1)^3}.$$

Oblicz $f^{(2022)}(1)$.

Rozwiązanie:

Podstawmy $z = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$, wówczas, $k = \frac{1}{z-1}$. Zatem,

$$f(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{\left(\frac{1}{z-1} - 1\right)^3} = \frac{1}{(2-z)^3}.$$

Zatem funkcja f zgadza się z funkcją $\frac{1}{(2-z)^3}$ dla $z = 1 + \frac{1}{k}$, dla k dostatecznie dużych, zatem, na mocy zasady identyczności, $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$, dla $z \in \Omega$. Stąd otrzymujemy

$$f^{(2022)}(z) = \frac{2024!}{2} \cdot (-1)^{2022} \cdot \frac{1}{(2-z)^{2025}} = \frac{2024!}{2} \cdot \frac{1}{(2-z)^{2025}},$$

więc $f^{(2022)}(1) = -\frac{2024!}{2}$.

5. (10 p.) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem ograniczonym. Niech $(f_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych na pewnym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ takim, że $\overline{\Omega} \subset U$. Załóżmy, że szereg

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

jest zbieżny jednostajnie na $\partial\Omega$. Pokaż, że szereg s jest zbieżny jednostajnie na $\overline{\Omega}$.

Rozwiązanie:

Przypomnijmy, że zgodnie z *warunkiem Cauchy'ego*, szereg s będzie zbieżny jednostajnie na $\overline{\Omega}$ wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $N > 0$ takie, że dla dowolnych $m \geqslant n > N$ mamy

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Skoro szereg s jest zbieżny jednostajnie na $\partial\Omega$, to istnieje $N_0 > 0$ takie, że dla dowolnych $m \geqslant n > N_0$ mamy

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Zauważmy, że skoro funkcje f_k sa holomorficzne na $U \supset \overline{\Omega}$, to z zasady maksimum otrzymujemy, że dla $n \geqslant m > N_0$ mamy

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| = \sup_{x\in\partial\Omega} \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Zatem szereg s jest zbieżny jednostajnie na $\overline{\Omega}$.

6. (10 p.) (a) Znajdź ogólną postać homografii h, która zachowuje oś rzeczywistą oraz spełnia warunek $h(\infty) = 1$.

   (b) Przekształć konforemnie obszar

   $$\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < 1/2\} \setminus \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z+2| \leqslant 2\}$$

   na pierścień postaci $\{z\colon r < |z| < 1\}$. Ile wynosi r?

   Podpowiedź: Możesz założyć, że szukana homografia zachowuje oś rzeczywistą.

Rozwiązanie:

(a) Niech $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Warunek $h(\infty) = 1$ jest równoważny temu, że

$$1 = h(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} h(z) = \frac{a}{c}.$$

Zatem $a = c$. W konsekwencji, możemy napisać

$$h(z) = \frac{z+B}{z+D},$$

dla pewnych $B, D \in \mathbb{C}$.

Zauważmy, że skoro h zachowuje oś rzeczywistą, to jedyne $b \in \mathbb{C}$ takie, że $h(b) = 0$ jest rzeczywiste. Zatem $b = B \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że odwzorowanie $u(z) = \frac{1}{z}$ jest homografią, która zachowuje oś rzeczywistą. Zatem złożenie

$$(u \circ h)(z) = \frac{z+D}{z+B}$$

również zachowuje oś rzeczywistą. Argumentując jak w poprzednim paragrafie stwierdzamy, że $D \in \mathbb{R}$.

Ostatecznie, każda homografia h, która zachowuje oś rzeczywistą i spełnia $h(\infty) = 1$ jest postaci

$$h(z) = \frac{z+B}{z+D},$$

gdzie $B, D \in \mathbb{R}$ oraz $B \neq D$. Z drugiej strony, każda homografia powyższej postaci spełnia warunki zadania.

(b) Niech h będzie szukaną homografią. Zauważmy, że h przekształca prostą $L = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z) = 1/2\}$ na okrąg $C_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ lub na okrąg $C_2(r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$, dla pewnego $0 < r < 1$. Zauważmy, że jeśli h przekształca prostą L na okrąg C_2, wówczas przekształca okrąg $C_3 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z+2| \leqslant 2\}$ na okrąg C_1. Jeśli $u(z) = \frac{1}{z}$, wówczas homografia

$$g(z) = \frac{1}{r}(u \circ h(z))$$

przekształca prostą L na C_1 oraz okrąg C_3 na okrąg C_2. Dlatego, bez straty ogólności, możemy założyć, że $h(L) = C_1$.

Zauważmy, że skoro $h(L) = C_1$ oraz h zachowuje prostą rzeczywistą, to $h(\infty) = 1$ lub $h(\infty) = -1$. Jeśli $h(\infty) = -1$, wówczas $(-h)(\infty) = 1$, zatem możemy założyć, że $h(\infty) = 1$.

Zatem, na mocy poprzedniego punktu, skoro h zachowuje oś rzeczywistą i $h(\infty) = 1$, to możemy zapisać

$$h(z) = \frac{z+B}{z+D}, \quad B, D \in \mathbb{R},\ B \neq D.$$

Skoro h przekształca L na okrąg C_1, zatem dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$|h(1/2+it)| = \left|\frac{1/2+it+B}{1/2+it+D}\right| = 1.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu otrzymujemy

$$1 = \frac{|1/2+it+B|^2}{|1/2+it+D|^2} = \frac{(1/2+B)^2+t^2}{(1/2+D)^2+t^2}.$$

Zauważmy, że powyższa równość wraz z warunkiem $B \neq D$ implikuje, że

$$B \neq -1/2, \quad \text{oraz} \quad D \neq -1/2. \tag{2}$$

Po przekształceniach

$$(B - D)(B + D + 1) = 0.$$

Skoro $B \neq D$, to $D = -1 - B$, oraz $B \neq -1/2$. Czyli szukaną homografię możemy zapisać w postaci

$$h(z) = \frac{z + B}{z - 1 - B}.$$

Wiemy, że homografia h przekształca okrąg C_3 na okrąg C_2, zatem dla $0, -4 \in C_3$ mamy

$$|h(0)| = |h(-4)|.$$

Podnosząc powyższą równość do kwadratu i podstawiając do wzoru na h otrzymamy

$$\frac{B^2}{(B+1)^2} = |h(0)|^2 = |h(-4)|^2 = \frac{(B-4)^2}{(B+5)^2}.$$

Równoważnie

$$\begin{aligned} 0 &= B^2(B+5)^2 - (B-4)^2(B+1)^2 = \\ &= [B(B+5) - (B-4)(B+1)]\,[B(B+5) + (B-4)(B+1)] = \\ &= 2(8B+4)(B^2+B-2) = 8(2B+1)(B-1)(B+2). \end{aligned}$$

i. Dla $B = 1$ otrzymujemy
$$h_1(z) = \frac{z+1}{z-2}.$$
Mamy $h_1(0) = -1/2$, zatem h_1 przekształca obszar Ω na pierścień $A = \{z \in \mathbb{C}\colon 1/2 < |z| < 1\}$.

ii. Dla $B = -2$ otrzymujemy
$$h_{-2}(z) = \frac{z-2}{z+1}.$$
Mamy $h_{-2}(0) = -2$, zatem h_{-2} przekształca obszar Ω na pierścień $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$. Zatem, homografia $\frac{1}{2}h_{-2}$ przekształca obszar Ω na pierścień A.

iii. Rozwiązanie $B = -1/2$ odrzucamy na mocy warunku (2).

Alternatywne Rozwiązanie:

W tym rozwiązaniu wykorzystamy pewien fakt dotyczący inwersji względem okręgu. Zacznijmy od przypomnienia terminologii. Mówimy, że dwa punkty na sferze Riemanna $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ są *symetryczne* względem okręgu wielkiego C, jeśli jeden z nich jest obrazem drugiego przy inwersji względem C.

Lemat 1. *Załóżemy, że $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ są symetryczne względem okręgu wielkiego C na sferze Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$. Jeśli $h\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ jest homografią, wówczas punkty $h(p)$ i $h(q)$ są symetryczne względem $h(C)$.*

Niech $C_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ oraz $C_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$. Zauważmy, że punkty $p = 0$ oraz $q = \infty$ są symetryczne względem obu okręgów C_1 i C_2. Co więcej, jest to jedyna para punktów o tej własności. Zatem, jeśli h jest szukaną homografią, wówczas, na mocy Lematu 1, punkty $h^{-1}(p)$ i $h^{-1}(q)$ są symetryczne względem okręgu $C_3 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z+2| = 2\}$ oraz prostej $L = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) = 1/2\}$. Spróbujmy zatem znaleźć punkty $a = h^{-1}(p)$ i $b = h^{-1}(q)$.

Po pierwsze, zauważmy, że skoro a i b są symetryczne względem prostej L, czyli leżą na pewnej prostej poziomej. Po drugie, skoro a i b są symetryczne względem C_3, to znaczy, że środek tego okręgu leży na prostej przechodzącej przez a i b. Zatem punkty a i b leżą na prostej rzeczywistej. Co więcej, leżą po różnych stronach punkty $1/2$, czyli możemy napisać $a = 1/2 - t$ oraz $b = 1/2 + t$, dla pewnego $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Dodatkowo, wiemy, że punkty a i b leżą po tej samej stronie punktu -2, zatem

$$-2 \leqslant 1/2 - t \leqslant 1/2 + t.$$

W konsekwencji $t \in [0, 5/2]$. Skoro a i b są symetryczne względem C_3, to znaczy, że

$$4 = |5/2 - t| \cdot |5/2 + t| = (5/2 - t)(5/2 + t).$$

Powyższe równanie ma cztery rozwiązania $t = \pm 3/2$ oraz $t = \pm\sqrt{41}/2$. Skoro $t \in [0, 5/2]$, to jedyne równiązanie spełniające ten warunek to $t = 3/2$. Wówczas $a = -1$ oraz $b = 2$. Stąd wnioskujemy, że szukana homografia ma jedną z dwóch postaci:

$$h_1(z) = A_1 \cdot \frac{z-2}{z+1}, \quad h_2(z) = A_2 \cdot \frac{z+1}{z-2},$$

gdzie $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

Z Lematu 1 wynika, że homografia h_i, dla $i = 1, 2$, przekształca okrąg C_3 i prostą L, na okręgi, względem których punkty 0 i ∞ są symetryczne, czyli okręgi o środku w punkcie 0. Mamy

$$h_1(0) = -2A_1, \quad h_1(1/2) = -A_1.$$

Zatem $h(C_3) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 2|A_1|\}$ oraz $h(L) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = |A_1|\}$. Jeśli ustalimy A_1 takie, że $|A_1| = 1/2$, wówczas homografia h_1 spełnia żądane warunki. Podobnie sprawdzamy, że dla dowolnego A_2 takie, że $|A_2| = 1$, homografia h_2 spełnia warunki zadania.